مدرسة الشبهانة للتعليم الأساسي والثانوي
Al Shabhana School cycle 2 and 3

مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التعليم أولاً

النجم الساطع

المراجعة النهائية للصف العاشر المتقدم

الفصل الدراسي الثالث 2017/2016

الرياضيات للجميع
Mathematics for All Group

Mr. Ali Abdalla Abdelmohsen Mahmoud
AL SHABHANA SCHOOL

الأسئلة من 1 إلى 40 : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :-

1 أبسط صورة للعبارة النسبية التالية : $\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ هي .....

A. $\frac{x+4}{x+1}$ B. $\frac{x-4}{x+1}$ C. $\frac{16}{3x+4}$ D. $\frac{x-4}{x-1}$

2 مجال الدالة $f(x)=\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}$ هو .....

A. $\mathcal{R}-\{3\}$ B. $\mathcal{R}-\{3,-1\}$ C. $\mathcal{R}-\{-1\}$ D. $\mathcal{R}-\{-3,1\}$

3 خط التقارب الرأسي للدالة $f(x)=\frac{3}{x-5}+3$ هو

A. $y=3$ B. $x=3$ C. $y=5$ D. $x=5$

4 خط التقارب الأفقي للدالة $f(x)=\frac{3}{x-5}+3$ هو

A. $y=3$ B. $x=3$ C. $y=5$ D. $x=5$

5 ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A. عكسي B. مُرَكَّب C. طردي D. مشترك

6 ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
8	2
4	4
-2	-8
-8	-2

A. عكسي B. مُرَكَّب C. طردي D. مشترك

7 إذا كانت a تتغيَّر طردياً مع b وعكسياً مع c وكانت $b=15$ عندما $c=2$ و $a=4$ فما قيمة b عندما $a=7$ و $c=-8$ ؟

A. $\frac{1}{105}$ B. $\frac{-1}{105}$ C. 105 D. -105

8 إذا كانت y تتغيَّر طردياً مع x وعكسياً مع z فإن ثابت التغير k يعطى من العلاقة .....

A. $k=\frac{yz}{x}$ B. $k=\frac{x}{yz}$ C. $k=xyz$ D. $k=\frac{xy}{z}$

9 قيمة x التي تجعل الدالة $f(x)=\frac{3x}{2x-8}$ غير معرفة هي .....

A. $x=8$ B. $x=-8$ C. $x=4$ D. $x=-4$

10 المُضاعف المُشْتَرك الأصغر لوحيدات الحدود التالية : $4xyz$, $12xy^3$, $6x^2y^2$ هي .....

A. $12xyz$ B. $12x^2y^3z$ C. $12x^2y^2z$ D. $24x^2y^3z$

11 حل المعادلة : $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ هو .....

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

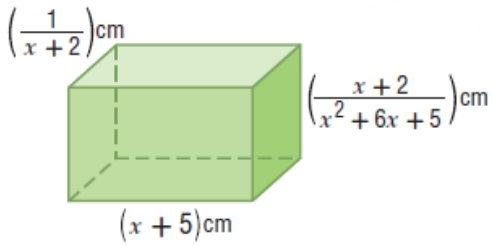
12 ما قيمة x في المعادلة : $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$ هو .....

A. 7 B. -7 C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{7}$

13 معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية: $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$ هي .....

A. $x=2$ B. $x=-2$ C. $x=-1$ D. $x=1$

14 ما حجم متوازي المستطيلات المرسوم بالشكل المجاور؟



A. $\frac{1}{x+1}$ B. $\frac{1}{x+5}$

C. $\frac{1}{x-1}$ D. $x+1$

15 ما حل المعادلة : $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{10}$

16 إذا كان $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$ فما قيمة a ؟

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{-1}{8}$

17 ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالة : $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟

A. -5 أو 2 B. 2 أو 3 C. 4 D. -5

18 مـا أبسـط صـورة للكسـر المُركَّـب : $\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A. $\frac{x+3}{x+4}$ B. $\frac{1}{x-4}$ C. $\frac{x+3}{x-4}$ D. $\frac{x-4}{x+3}$

19 تتغيَّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طردياً مع عدد أيام استئجارها كما هو موضَّح في الجدول المجاور؟
أي المعادلات التالية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

عدد الأيام	التكلفة (بالدرهم)
1	150
2	300
3	450
4	600

A. $y=x+150$ B. $y=\frac{150}{x}$

C. $y=150x$ D. $y=600x$

20 أيٌّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالة النسبية : $f(x)=\frac{1}{x^2-49}$ ؟

A. $y=0$ B. $x=-7$ C. $y=1$ D. $x=7$

21 في أيِّ اتجـاه يجـب إزاحـة التمثيل البـياني للدالة $y=\frac{1}{x}$ ، للحصـول على التمثـيل البياني للدالة $y=\frac{1}{x}+2$ ؟

A. إلى اليسار بمقدار 2 B. إلى اليمين بمقدار 2 C. إلى أسفل بمقدار 2 D. إلى أعلى بمقدار 2

22 مجال الدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ هو .....

A. $\mathcal{R}-\{-1\}$ B. $\mathcal{R}-\{2,-1\}$ C. $\mathcal{R}-\{1\}$ D. $\mathcal{R}-\{-2,1\}$

23 مدى الدالة $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$ هو .....

A. $\mathcal{R}-\{-2\}$ B. $\mathcal{R}-\{2\}$ C. $\mathcal{R}-\{3\}$ D. $\mathcal{R}-\{-3\}$

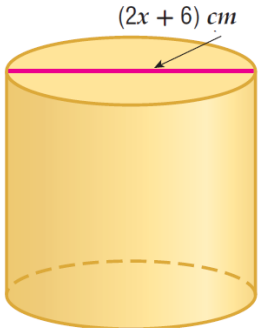
24 قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة هي .....

A. $-6,3,4,6$ B. $-6,6$ C. $4,\ 6$ D. $-6,\ 3$

25 أبسط صورة للكسر المُرَكَّب $\frac{\frac{a^2+b^2}{4}}{\frac{a+b}{4}}$ هو .....

A. $a-b$ B. $a+b$ C. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ D. $\frac{a+b}{a^2+b^2}$

26 إذا كان حجم الأسطوانة في الشكل المجاور؟
$(x+3)(x^2-3x-18)\pi\ \ cm^3$ فإن ارتفاعها يساوي .....



A. $x-6$ B. $x^2-3x-18$

C. $x-3$ D. $x+6$

27 نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل $240\ \text{cm}^2$ ، فكم سنتمترًا طول قطر المستطيل؟

A. 30 B. 26 C. 32 D. 28

28 أيٌّ من الزوايا الآتية يكون الجيب والظلّ لها سالبين؟

A. $65°$ B. $310°$ C. $120°$ D. $265°$

29 طول دورة الدالّة $y=3\cot\theta$ يساوي:

A. $120°$ B. $180°$ C. $360°$ D. $1080°$

30 إذا كان $\text{Sin}\,\theta=0.422$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A. $65°$ B. $48°$ C. $42°$ D. $25°$

31 إذا كان $\text{Tan}\,\theta=1.8$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A. $0.03°$ B. $60.9°$ C. $29.1°$ D. لا يوجد حلّ

32 إذا كان $\text{Sin}\ \theta = -0.35$، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريبًا يساوي:

A. $-20.5°$ **B.** $-0.6°$ **C.** $0.6°$ **D.** $20.5°$

33 أيّ من الزوايا الآتية تحقّق $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؟

A. $990°$ **B.** $1080°$ **C.** $1830°$ **D.** $1215°$

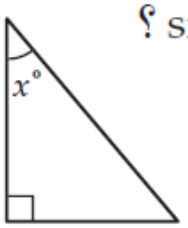
34 إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

A. 161 **B.** 13 **C.** 31 **D.** 5

35 افترض أن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos\theta > 0$. في أيِّ ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ؟

A. الربع الأول أو الرابع **B.** الربع الأول أو الثالث **C.** الربع الثاني أو الثالث **D.** الربع الأول أو الثاني

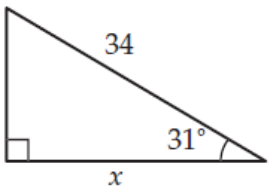
36 في الشكل المجاور، إذا كان $\cos x = \frac{20}{29}$ ، فكم قيمة كلٍّ من $\sin x, \tan x$ ؟



A. $\sin x = \frac{29}{21}, \tan x = \frac{29}{21}$ **B.** $\sin x = \frac{21}{29}, \tan x = \frac{20}{21}$

C. $\sin x = \frac{29}{21}, \tan x = \frac{21}{20}$ **D.** $\sin x = \frac{21}{29}, \tan x = \frac{21}{20}$

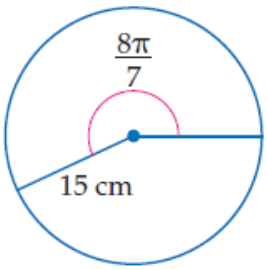
37 كم قيمة x إلى أقرب جزء من عشرة في الشكل أدناه؟



A. 29.1 **B.** 17.5

C. 39.5 **D.** 20.4

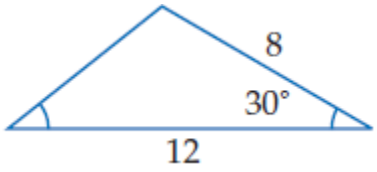
38 طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة يساوي:



A. 4.2 cm **B.** 17.1 cm

C. 17.1 cm **D.** 2638.9 cm

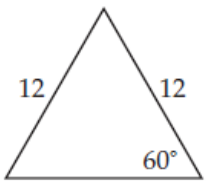
39 مساحة المثلّث الموضَّح في الشكل المجاور تساوي:



A. 48 **B.** 96

C. 41.6 **D.** 24

40 محيط الشكل المجاور يساوي:



A. 36 **B.** 24

C. 48 **D.** 30

41 بَسِّط العِبارات النسبية التالية:

A. $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{x-2}$

B. $\frac{2x^2-4x+8}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3+8}$

C. $\frac{12\,a^2b^3}{15\,x\,y^2} \div \frac{8\,a^2\,b^3}{20\,x^3\,y^2}$

D. $\frac{9-x^2}{x^2-4x-21} \cdot \left(\frac{2x^2-7x+3}{2x^2-15x+7}\right)^{-1}$

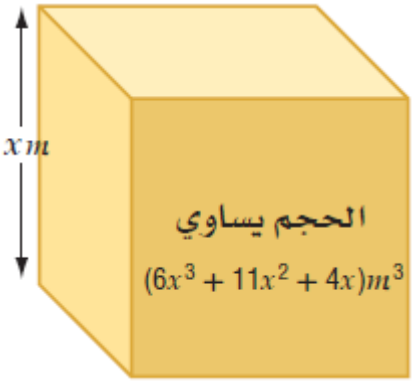
42

يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)\ m^3$ للتعبير عن حجم الصندوق في الشكل المجاور الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات ، حيث x ارتفاع الصندوق.

a) أوجد بعدي الصندوق الآخرين.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسب بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكل قيم x ؟



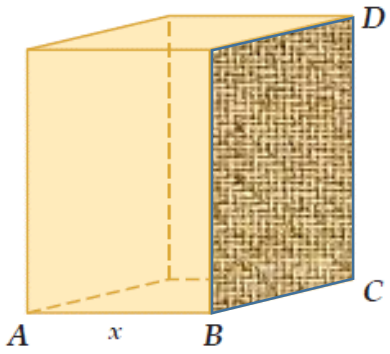
43

مساحة قاعدة المنشور (متوازي مستطيلات) المجاور تساوي $20\ cm^2$.

a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$ ، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x .



44 تمثل الدالة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط ، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

a. اكتب الدالة في أبسط صورة.

b. ما سُمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

45 بَسِّط العِبارات النسبية المُرَكَّبة التالية:

A. $\dfrac{\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x^2-9}}{\frac{3}{x+3} - \frac{4x}{x^2-9}}$

B. $\dfrac{\frac{4}{x+5} + \frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6} - \frac{8}{x+5}}$

46

قدَّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج أحد الآبار مستعملين الدالة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$ حيث $R(x)$ مُعدّل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنوياً بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a. بَسِّط الدالة $R(x)$.

b. ما مُعدّل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟

47

بَسِّط العبارات النسبية التالية:

1. $\frac{4+\frac{2}{x}}{3-\frac{2}{x}}$

2. $\frac{6+\frac{4}{y}}{2+\frac{6}{y}}$

3. $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{1+\frac{4}{y}}$

4. $\frac{\frac{2}{b}+\frac{5}{a}}{\frac{3}{a}-\frac{8}{b}}$

48

يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2-9}{x-2}$ و يُعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x+3}{x^2-4}$ أوجد النسبة بين طولي المستطيلين ، ثُمَّ اكتُبها في أبسط صورة.

49

يحدِّد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، وجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

(a) اكتب y كدالّة في المتغير x.

(b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

50

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

a) $6xy$, $15x^2$, $9xy^4$

b) $y^4+8y^3+15y^2$, $y^2-3y-40$

51 بَسِّط العِبارات النسبية التالية:

A. $\frac{4x}{x^2-5x-6} - \frac{2}{x+1}$

B. $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$

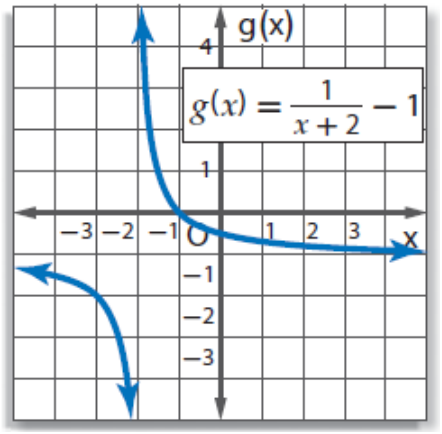
C. $\frac{x^3+3x^2+9x}{x^3-27} + \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

52 يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه بوحدة الجرام/لتر (g/L) يعطى بالدالتين : $g(t) = \frac{3t}{2t^2+6t+4}$, $f(t) = \frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالتين لتحصل عل دالة تمثل تركيز النوعين معاً في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 5 ساعات من تناولهما؟

53 حدد خطوط التقارب والمجال والمدى ومقطع y لكل دالة من الدوال الموضحة بالشكل التالي:



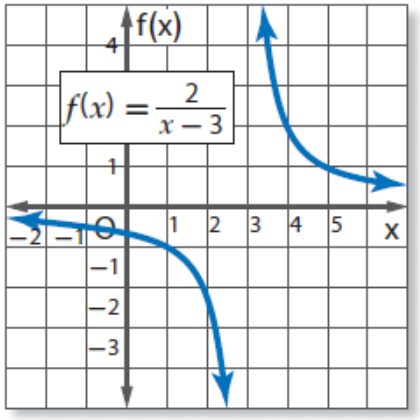
خط التقارب الرأسي : ----------

خط التقارب الأفقي : ----------

المدى : ----------

المجال : ----------

مقطع y: ----------



خط التقارب الرأسي : ----------

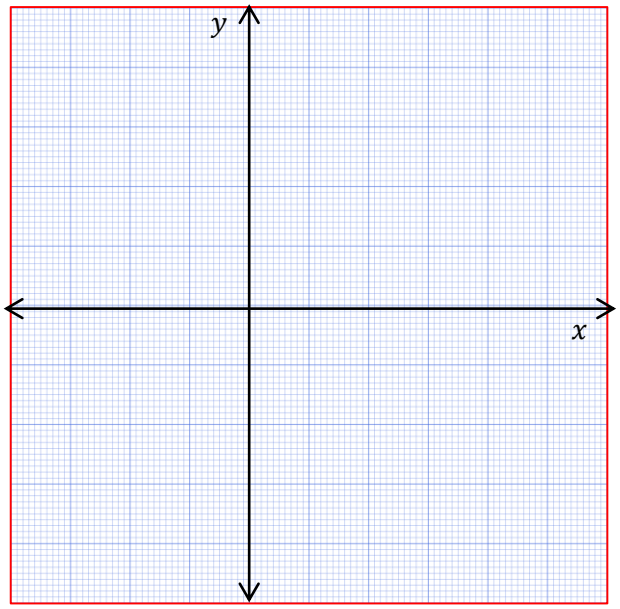
خط التقارب الأفقي : ----------

المدى : ----------

المجال : ----------

مقطع y: ----------

54 مثل بيانياً الدالة: $f(x) = \frac{2}{x-1}$ موضحاً المجال والمدى



خط التقارب الرأسي : ----------

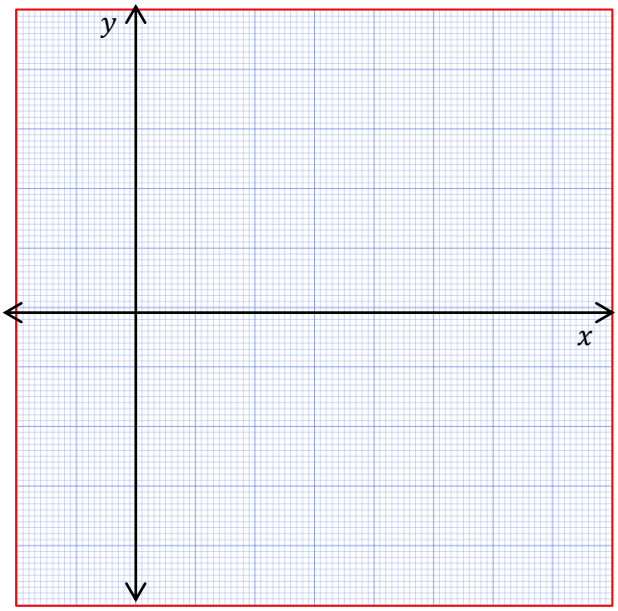
خط التقارب الأفقي : ----------

المجال : ----------

المدى : ----------

x															
y															

55 خطط الرسم البياني للدالة: $f(x) = \frac{1}{x-2} - 1$ موضحاً المجال والمدى



خط التقارب الرأسي : ----------

خط التقارب الأفقي : ----------

المجال : ----------

المدى : ----------

56 تتغيِّر الزيادة في طول الزنبرك S طردياً مع الوزن F للجسم المُعلق به، إذا ازداد طول زنبرك بمقدار 20 بوصة عند تعليق جسم وزنه 25 رطلاً ، فكم تكون الزيادة في طوله عند تعليق جسم وزنه 35 رطلاً؟

57 إذا كانت y تتغيَّر عكسياً مع x ، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$ فأوجد قيمة x عندما $y = -10$

58 إذا كانت m تتغيَّر طردياً مع n ، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$ فأوجد قيمة n عندما $m = 30$

59 إذا كانت r تتغيَّر مشتركاً مع s و t ، وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$ ، $t = -5$ فأوجد قيمة s عندما $r = 7$ ، $t = 2.5$

60 إذا كانت x تتغيَّر طردياً مع y وعكسياً مع z ، وكانت $x = 6$ عندما $y = 14$ ، $z = 20$ فأوجد قيمة z عندما $y = -7$ ، $x = 10$

61 حدد إذا كانت المعادلات في كل مما يأتي تمثل تغيّراً طردياً ، أو عكسياً ، أو مشتركاً ، أو مركباً ، ثم أوجد ثابت التغير (التناسب) في كل منها:

1) $x = 15yz$ 2) $-10 = cd$ 3) $y = \frac{6}{x}$ 4) $x = 15y$

62

يتغيَّر حجم غاز معين v طردياً مع درجة حرارته t وعكسياً مع ضغطه p حيث ($v = \frac{kt}{p}$).

a) هل تمثل المعادلة تغيُّراً طردياً أم عكسياً أن مشتركاً أم مركباً؟

b) عينه من الغاز حجمها 8 لترات ، ودرجة حرارتها $275°$ كلفن ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي ، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 لترات وتسخينها إلى ودرجة حرارتها $300°$ كلفن. كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

63

يتغيّر أجر أحد العمال طردياً مع عدد ساعات عمله ، فإذا تقاضى 120 درهماً مقابل 8 ساعات ، فكم درهماً يتقاضى إذا عمل 5 ساعات؟

64

حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

1) $\frac{4}{7}+\frac{3}{x-3}=\frac{53}{56}$

2) $\frac{7}{3}-\frac{3}{x-5}=\frac{19}{12}$

3) $\frac{8}{x-5}-\frac{9}{x-4}=\frac{5}{x^2-9x+20}$

4) $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x^2-4}$

حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

1) $3-\frac{4}{x}>\frac{5}{4x}$

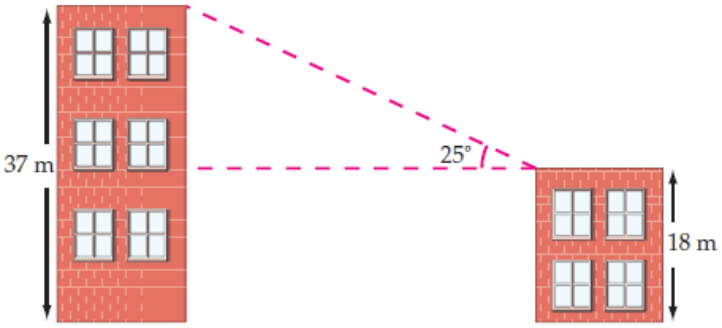
2) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{x-2}>\frac{x-4}{x-2}$

3) $\frac{3}{4}-\frac{1}{x-3}>\frac{x}{x+4}$

4) $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$.

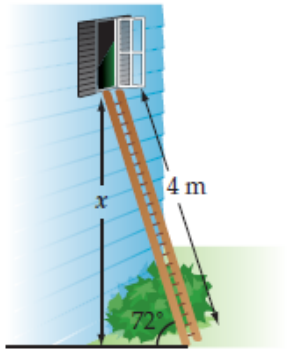
66

في الشكل المجاور بنايتان، ارتفاع إحداهما 18 m، وارتفاع الأخرى 37 m، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمَّة البناية الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي بين البنايتين والخط المارِّ من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو 25°. فما المسافة الأفقية بين البنايتين؟



67

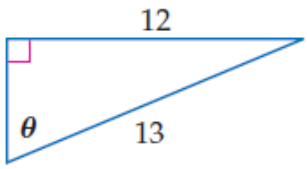
سُلَّمٌ طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72°. ما ارتفاع قمَّة السلَّم عن الأرض؟



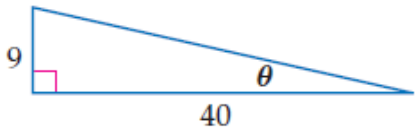
68

أوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية θ الموضَّحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1



2



69

إذا علمت أن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان حادّتان في مثلّث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

1 إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$، فما قيمة $\cos A$؟

2 إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$، فما قيمة $\tan A$؟

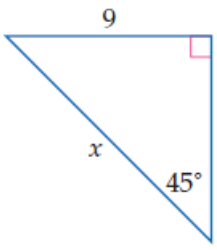
3 إذا كان $\tan B = 3$، فما قيمة $\sin B$؟

4 إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$؟

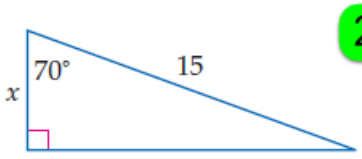
70

في كلٍّ ممَّا يأتي، استعمل دالّة مثلّثية لإيجاد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

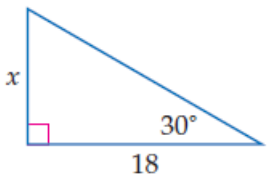
1



2

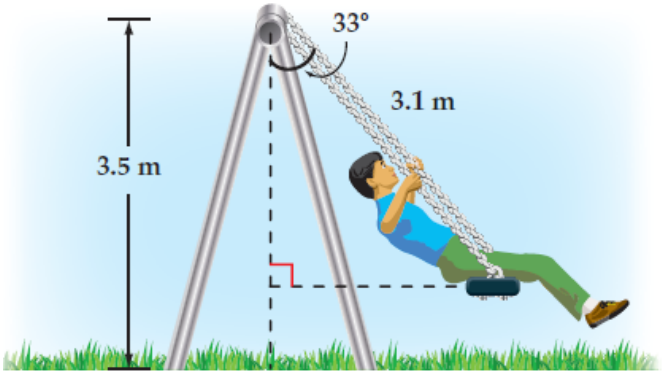


3



71

يلعب طفل على أرجوحة في متنزَّه، فإذا كان ارتفاع أعلى الأرجوحة من الأرض 3.5 m، والزاوية التي يصنعها حبل الأرجوحة مع الخطِّ العمودي على الأرض في لحظة ما، كما هو مُبيّن في الشكل المجاور، فأوجد ارتفاع مقعد الأرجوحة عن الأرض في تلك اللحظة.



72

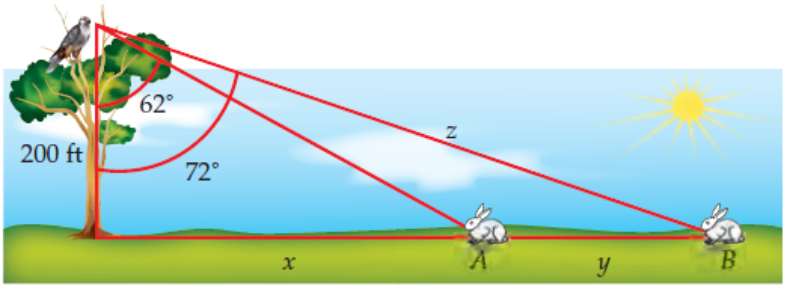
حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

1 $\cos A = \frac{3}{19}$ 2 $\sin N = \frac{9}{11}$ 3 $\tan X = 15$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

73

رأى صقر من ارتفاع 200 ft أرنبين A, B. كما هو موضَّح في الشكل.



a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟

b) ما البُعد بين الأرنبين؟

74

في $\triangle ABC$ ، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المُعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

1. $m\angle A = 36°, a = 12$
2. $a = 8, c = 17$
3. $m\angle B = 31°, b = 19$
4. $\tan A = \frac{4}{5}, \ a = 6$

75

ارسم كلًّا من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

1) $75°$ 2) $160°$ 3) $-90°$

4) $-120°$ 5) $295°$ 6) $510°$

7) يتأرجح لاعب جمباز على جهاز له عارضتان، ليدور بزاوية قياسها $240°$. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

1) $50°$ 2) $95°$ 3) $205°$

4) $350°$ 5) $-80°$ 6) $-195°$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان ، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $330°$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$

4) $-50°$ 5) $190°$ 6) $-\frac{7\pi}{3}$

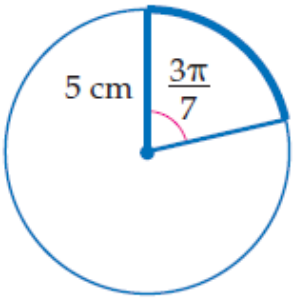
76

درَّاجة ذات عجلة واحدة نصف قطرها 0.8 ft، ما المسافة التي تقطعها العجلة إذا دارت $\frac{1}{4}$ دورة؟

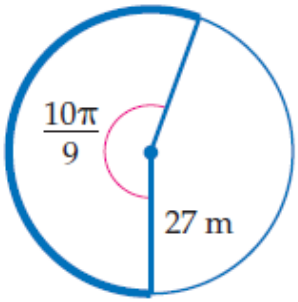
77

أوجد طول القوس المحدد في كلٍّ من الدائرتين الآتيتين، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

1



2



قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا الخاصّة					
الجيب	جيب التمام	الظلّ	قاطع التمام	القاطع	ظلّ التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

78

لديك النقطتان $C(6, 0), D(6, 8)$.

a) ارسم المثلّث ΔECD حيث E هي نقطة الأصل.

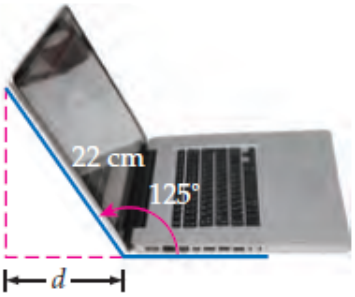
b) أوجد ظلّ $\angle CED$.

c) أوجد ميل $\overline{ED}$.

d) ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظلّ الزاوية؟

79

فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm، فشكّل زاوية قياسها 125° كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.



a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثيّ بحيث تكون الزاوية 125° مرسومة في الوضع القياسي.

b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية 125° ، ثم اكتب دالّة مثلّثية يمكن استعمالها في إيجاد d.

c) استعمل هذه الدالّة، لإيجاد قيمة d، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

80

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرّة، فأوجد قيم الدوالّ المثلّثية الستِّ للزاوية θ :

1 $(1, 2)$ 2 $(-8, -15)$ 3 $(0, -4)$

ارسم كلًّا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

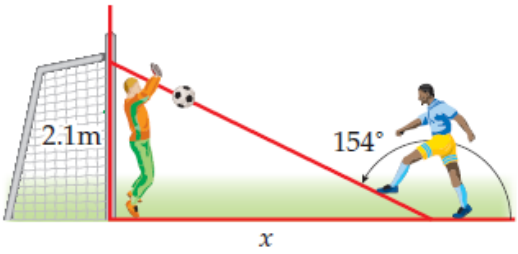
1 $300°$ 2 $115°$ 3 $-\frac{3\pi}{4}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية فيما يأتي:

1 $\sin \frac{3\pi}{4}$ 2 $\tan \frac{5\pi}{3}$ 3 $\sec 120°$ 4 $\sin 300°$

81

يركل لاعبٌ الكرةَ نحو الهدف من مسافة x m عن حارس المرمى كما هو مبيَّن في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض



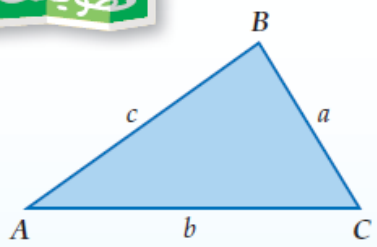
a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية 154°. ثم اكتب دالّة مثلّثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة.

b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مساحة المثلّث



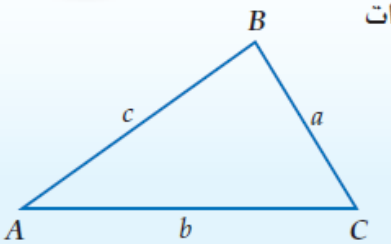
التعبير اللفظي: مساحة المثلّث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

الرموز: $k = \frac{1}{2} ab \sin C$ $\quad k = \frac{1}{2} ac \sin B$ $\quad k = \frac{1}{2} bc \sin A$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون الجيوب



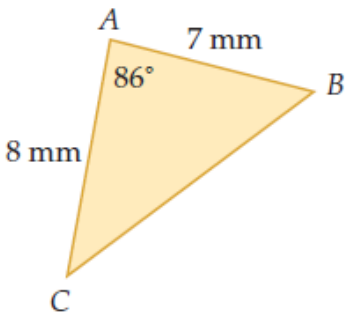
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

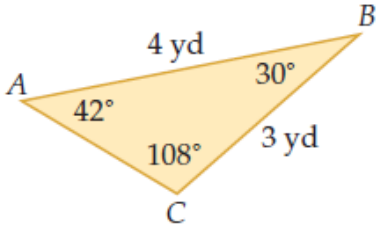
82

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

1



2



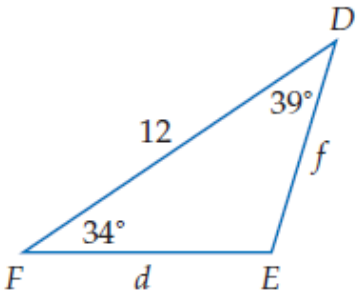
3 $A = 40°, b = 11\text{ cm}, c = 6\text{ cm}$

4 $B = 103°, a = 20\text{ in}, c = 18\text{ in}$

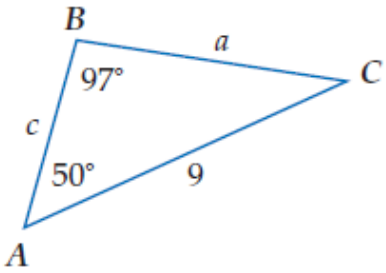
83

حُلّ كلَّ مثلَّث مما يأتي، مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:

1



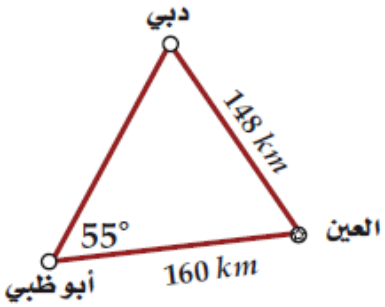
2



3 $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 80°, H = 40°, g = 14$.

84

في الشكل المجاور ثلاثة مواقع جغرافية تشكِّل مثلَّثا. إذا كانت المسافة بين أبوظبي والعين 160 km، وبين العين ودبي 148 km ، وقياس الزاوية عند أبوظبي 55° ، فأجب عما يأتي:

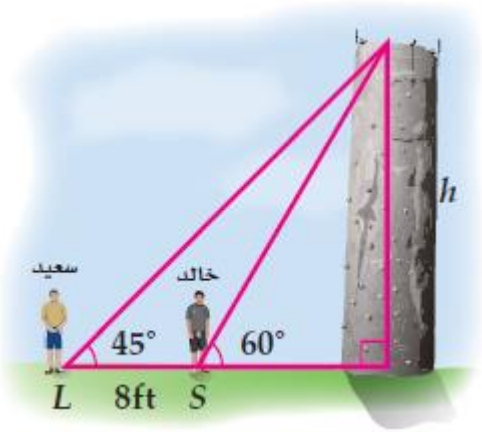


A أوجد قياس الزاوية عند مدينة العين.

B أوجد المسافة بين أبوظبي ودبي.

85

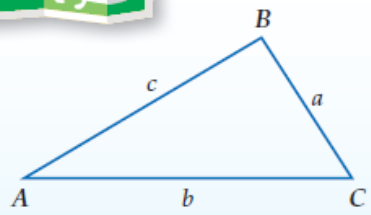
يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلُّق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبيّن في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري، مقرِّبًا إلى أقرب قدم؟



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون جيوب التمام



إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ملخّص المفهوم

أضف إلى مطويتك

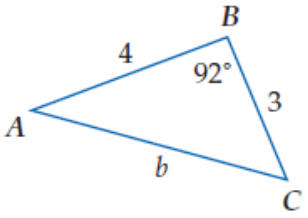
حَلُّ المثلَّثات غير القائمة الزاوية

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

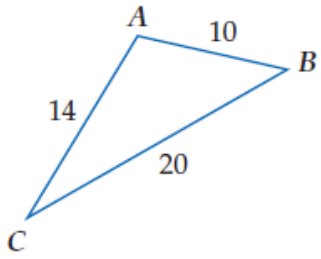
86

حُلَّ كلَّ مثلَّث ممَّا يأتي مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

1



2

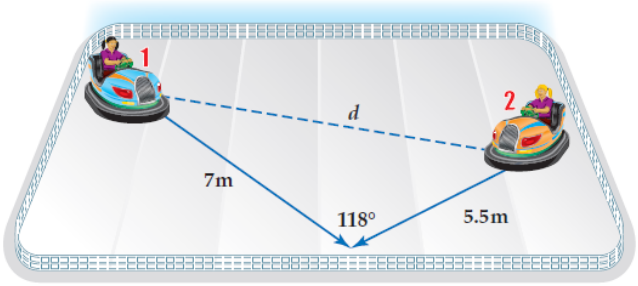


3 $a = 5, b = 8, c = 12$

4 $B = 110°, a = 6, c = 3$

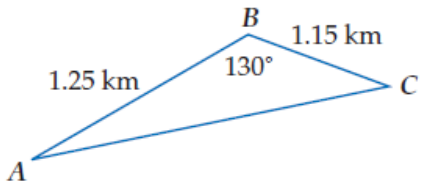
87

في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبيَّن في الشكل أدناه، ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟



88

يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهابًا وإيابًا، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



مفهوم أساسي

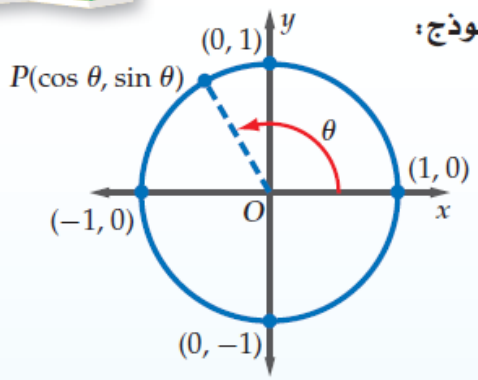
أضف إلى مطويتك

دوالّ في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$، فإن: $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

النموذج:



مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن:

$P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

89

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P، فأوجد كلًّا من $\cos\theta, \sin\theta$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

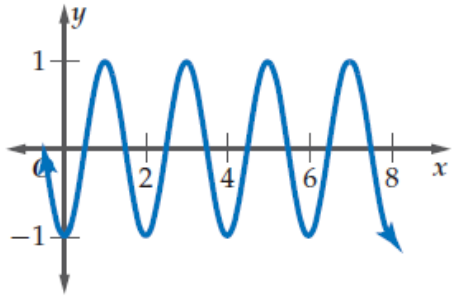
1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$

2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

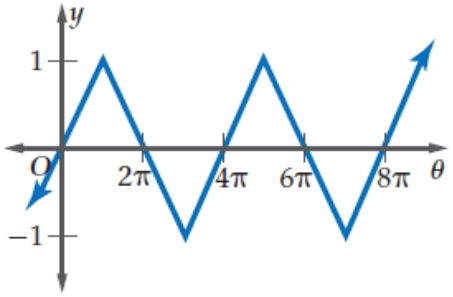
90

أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

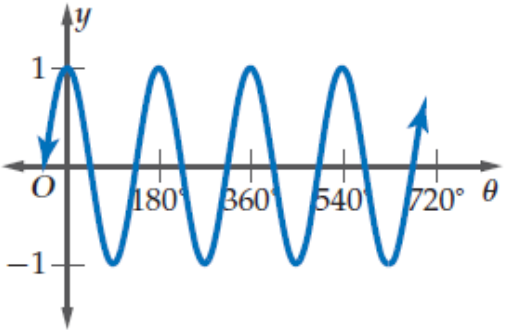
1)



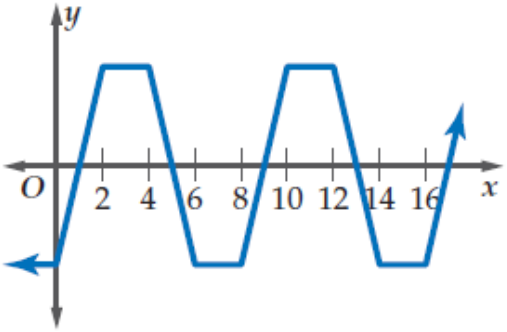
2)



3)



4)



91

أوجد القيم الدقيقة لكلِّ دالّة مثلّثية ممَّا يأتي:

1) $\sin\frac{7\pi}{3}$

2) $\cos(-60°)$

3) $\cos 450°$

4) $\sin\frac{11\pi}{4}$

5) $\sin(-45°)$

6) $\cos 570°$

92

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $\cos 45° - \cos 30°$

2 $6(\sin 30°)(\sin 60°)$

3 $2\sin\frac{4\pi}{3} - 3\cos\frac{11\pi}{6}$

4 $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\sin 3\pi$

5 $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$

6 $\frac{(\cos 30°)(\cos 150°)}{\sin 315°}$

93

قام كلٌّ من خالد ونواف بحساب قيمة المقدار $\cos\frac{-\pi}{3}$. فأيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

خالد

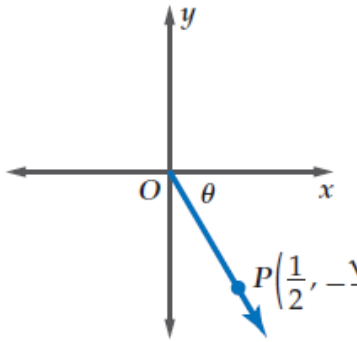
$$\cos\frac{-\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= -0.5$$

نواف

$$\cos\frac{-\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{5\pi}{3} = 0.5$$

94

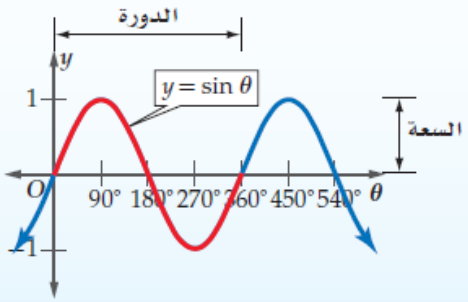
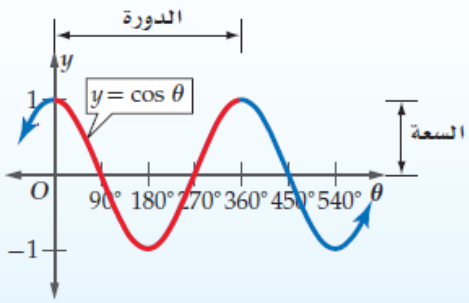
إذا بدأ نصف المستقيم الموضَّح في الشكل المجاور من نقطة الأصل مارًّا بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياسًا للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x .



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالتا الجيب وجيب التمام

الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

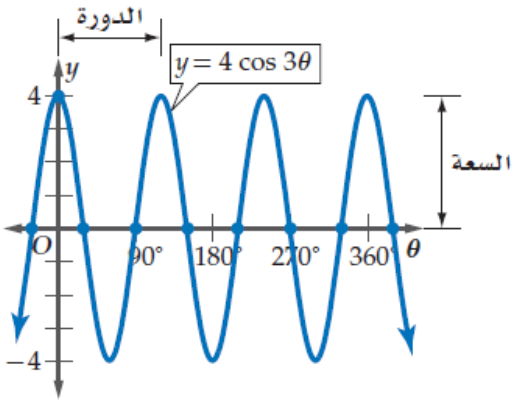
95

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4\cos 3\theta$.

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة يساوي $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ أو $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$

من الرسم يكرّر الرسم نفسه كلَّ 120°



تمرين

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

1 $y = \cos\frac{1}{2}\theta$

2 $y = 3\sin 5\theta$

مثال محلول

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

(a $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2 \, , \, b = 1$.

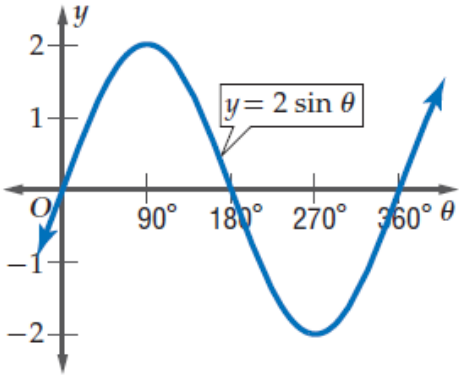
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًّا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2 .

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة طولها $360°$.

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$



(b $y = \cos 4\theta$

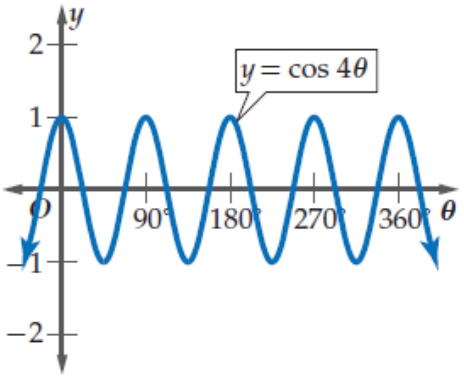
أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ، حيث: $a = 1 \, , \, b = 4$.

السعة: $|a| = |1| = 1$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|4|} = 90°$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (22.5°, 0)$

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (67.5°, 0)$



96

مثّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

1 $y = 3 \cos \theta$

2 $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

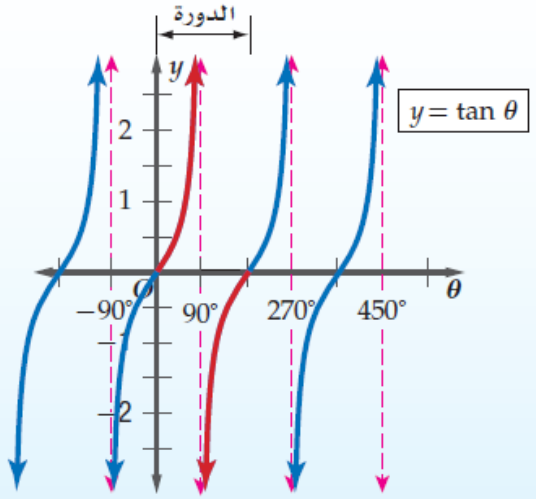
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالّة الظلّ

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \tan\theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180°n, n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	$180°$

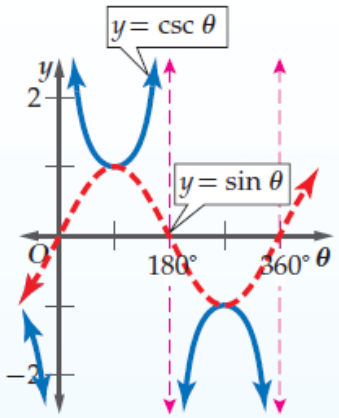
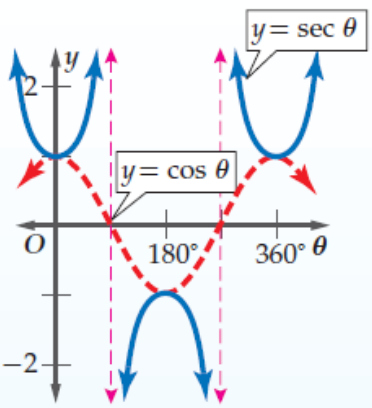
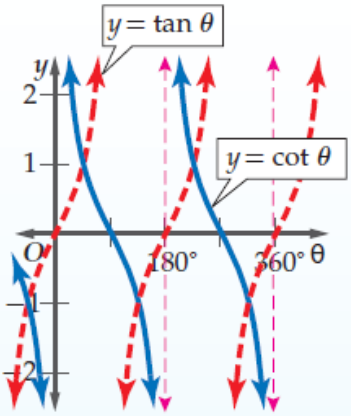
التمثيل البياني للدالّة



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دوالّ قاطع التمام والقاطع وظلّ التمام

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة	غير معرَّفة	غير معرَّفة
طول الدورة	$360°$	$360°$	$180°$

97

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

1 $y = 2\cos\theta$

2 $y = 3\sin\theta$

3 $y = \sin 2\theta$

4 $y = \cos 3\theta$

5 $y = \frac{3}{4}\cos\theta$

6 $y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

7 $y = 3\cos 2\theta$

8 $y = 5\sin\frac{2}{3}\theta$

9 $y = \sin\frac{x}{2}$

98

أوجد السعة، (إن كانت معرَّفة)، وطول الدورة لكلٍّ من الدوالّ الآتية، ثم مثّلها بيانيًّا:

1 $y = 3\sin\frac{2}{3}\theta$

2 $y = \frac{1}{2}\cos\frac{3}{4}\theta$

3 $y = 2\tan\frac{1}{2}\theta$

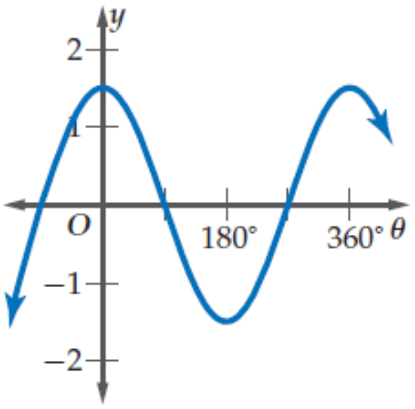
4 $y = 2\sec\frac{4}{5}\theta$

5 $y = 5\csc 3\theta$

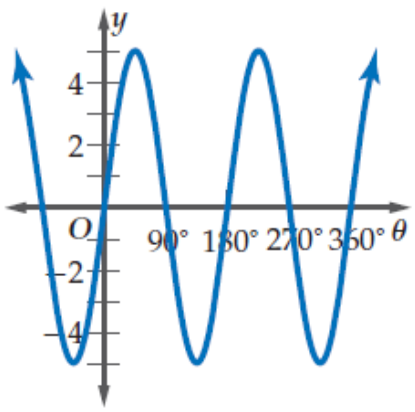
6 $y = 2\cot 6\theta$

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

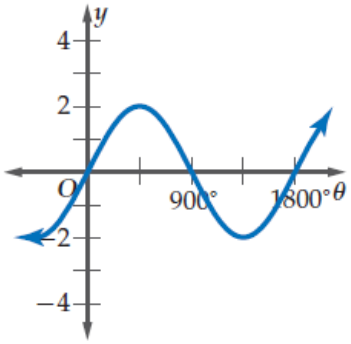
1



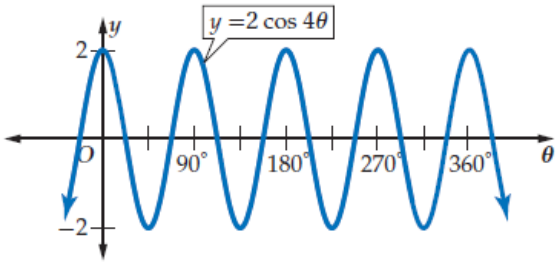
2



3



4



99

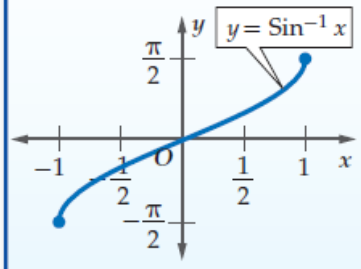
مفهوم أساسي

الدوالّ المثلّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالّة الجيب العكسية	$y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$
دالّة جيب التمام العكسية	$y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$
دالّة الظل العكسية	$y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$

نموذج



100

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

1 $\text{Cos}^{-1} 0$

2 $\text{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

101

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

1 $\cos\left(\text{Sin}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

2 $\tan\left(\text{Cos}^{-1} 1\right)$

3 $\sin\left(\text{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

102

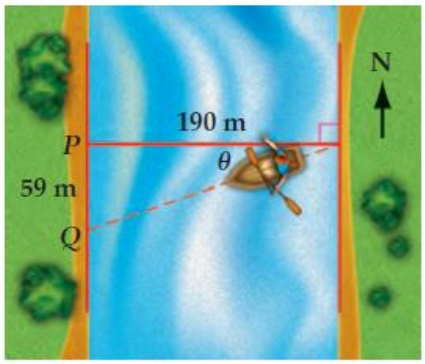
حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\text{Cos}\,\theta = 0.9$

2 $\text{Sin}\,\theta = -0.46$

3 $\text{Tan}\,\theta = 2.1$

103



يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهرًا عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالّة مثلّثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي أزاح التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.

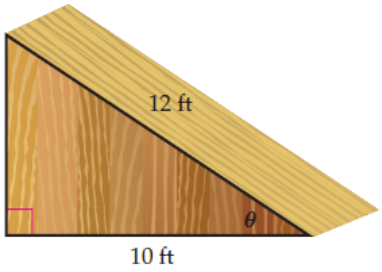
تمارين منوعة

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1 تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسيًّا. ما زاوية ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟

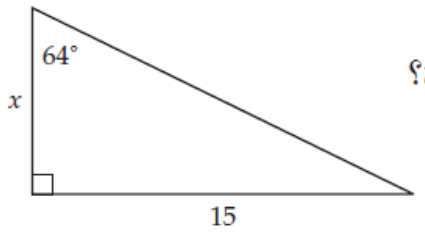
A 15.6° B 18.4° C 19.6° D 22.3°

2 ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثّله الشكل أدناه؟



F 26.3° G 28.5° H 30.4° J 33.6°

3 ما قيمة x في الشكل المجاور، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



A 6.5 B 6.9 C 7.1 D 7.3

4 ما القيمة الدقيقة لِـ $\sin 240°$؟

A $-\frac{1}{2}$ B $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالّة: $y = 3\cos 4\theta$؟

A 90° B 180° C 270° D 360°

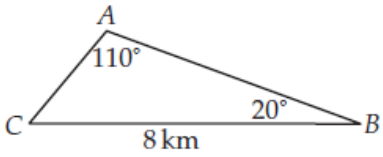
6 ما قيمة m في المثلّث MNO الذي فيه: $n = 12.4$ cm, $M = 35°$, $N = 74°$، مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

A 7.4 cm B 8.5 cm C 14.6 cm D 35.9 cm

7 إذا كان $\sin A = \frac{7}{10}$، فأوجد قيمة $\cos A$:

A $\frac{7\sqrt{149}}{149}$ B $\frac{\sqrt{51}}{10}$ C $\frac{10}{7}$ D $\frac{\sqrt{51}}{7}$

8 وصلت إشارة استغاثة من الموقع A إلى كل من المركزين B, C واللذان يبعدان عن بعضيهما مسافة 8 km كما هو مبين بالشكل أدناه.



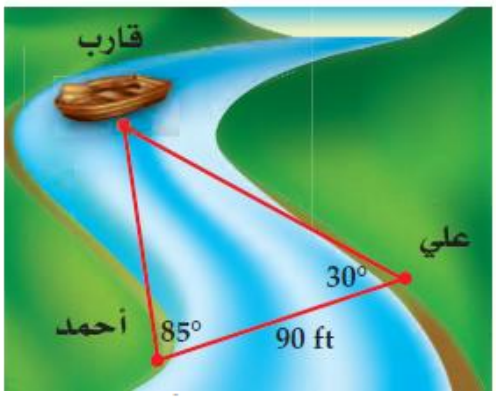
استعمل البيانات على الشكل لإيجاد كل مما يأتي:

a) المسافة بين موقع الاستغاثة والمركز B مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

b) المسافة بين موقع الاستغاثة والمركز C مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

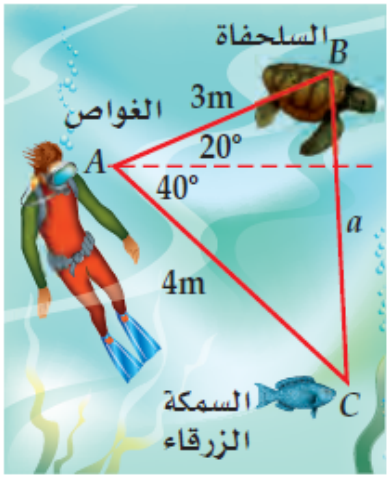
c) مساحة المثلث ABC مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

9 يقف علي وأحمد على جانبَي نهر. كم يبعد علي عن القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.



10 ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3 ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض 20°، مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة؟

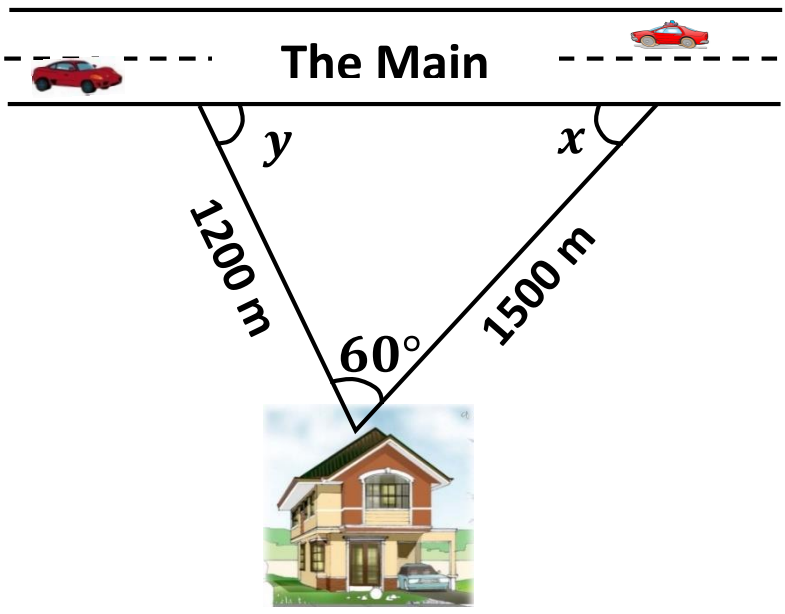
11 ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها 20° ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها 40° فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



أكمل الجدول التالي

Question السؤال	Function الدالة	Maximum Value القيمة الأعلى	Minimum Value القيمة الأدنى	Period الدورة	Amplitude السعة
1	$y = \sqrt{7}\ sin\ 2x$				
	$y = 2\ sin\ 3x$				
2	$y = cos\ \frac{x}{2}$				
	$y = \frac{1}{2} cos\ x$				
3	$y = \frac{1}{2} tan\ 0.5x$				
	$y = 3\ tan\ 2x$				

يملك أحمد مزرعة على شكل مثلث مختلف الأضلاع. قام أحمد ببناء منزل في الركن المواجه لضلع الأرض المجاور للطريق الرئيسي.
استأجر أحمد مساح لدراسة أبعاد الأرض ، وأعطاه المساح المقاييس الموضحة في الرسم التالي وهو طولي ضلعين من أضلاع الأرض الثلاثة والزاوية المحصورة بينهما.



حيث أن طول كل من الضلعين المعلومين أطول من 1 كيلو متر فقد ظن أحمد أن مساحة أرضه أكبر من 1 كيلو متر مربع . هل كان أحمد محقاً في تبريره؟ اشرح باستخدام صيغة ملائمة للمساحة.

لم يكن أحمد محق في ذلك . الصيغة المستخدمة هي :

$A = \frac{1}{2} \times x_1 \times y_1 \times sin\ z$ ➔ $A = \frac{1}{2} \times 1500 \times 1200 \times sin\ 60°$

ما هي مساحة مزرعة أحمد ؟

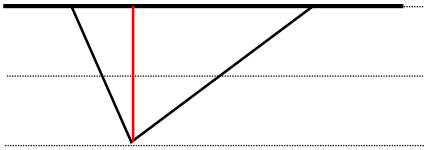
$A = \frac{1}{2} \times 1500 \times 1200 \times \sin 60° = \frac{1}{2} \times 1500 \times 1200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 450000\sqrt{3}\ m^2$

$A = 779422.8634\ m^2$

يريد أحمد شق طريق من منزله إلى الطريق الرئيسي بأقل تكلفة (أقصر طريق) . في أي اتجاه يجب أن يُشق هذا الطريق ؟ هل كانت القياسات المعطاة له من قبل المسّاح كافية لإيجاد طول هذا الطريق مباشرة ؟

اقصر طريق بين نقطة وخط مستقيم هو الطريق العمودي من هذه النقطة إلى الخط المستقيم

المعلومات التي أعطاها المسّاح له غير كافية لإيجاد طول هذا الطريق مباشرة



بدلاً من استدعاء المساح ، قرر أحمد حل المثلث . هل تنصحه باستخدام قاعدة الجيب أم قاعدة جيب التمام ؟ لماذا ؟

انصح أحمد باستخدام قاعدة جيب التمام

لأن المعلومات المتوفرة هي طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما ولذلك عليه استخدام قاعدة جيب التمام : $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ z$

قام أحمد بإيجاد طول الضلع المجاور للطريق العام كما أنه أوجَد قياس الزاوية x . ماذا كانت النتيجة ؟

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ z \rightarrow z^2 = (1200)^2 + (1500)^2 - 2(1200)(1500)\ cos\ 60°$

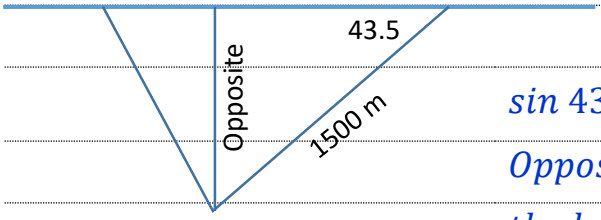
$z^2 = 1440000 + 2250000 - 3600000 \times \frac{1}{2} = 1890000 \rightarrow z = \sqrt{1890000} = 1374.77\ m$

لإيجاد قياس زاوية x نستخدم قاعدة الجيب

$\frac{\sin x}{1200} = \frac{\sin 60}{1374.77} \implies \sin x = \frac{1200 \sin 60}{1374.77} = 0.7559 \rightarrow x = \sin^{-1} 0.7559 = 43.5°$

هل أحمد لديه المعلومات الكافية الآن لإيجاد طول الطريق المراد شقه؟ إن كانت كافية ، أوجد طول هذا الطريق ؟

نعم ، لديه المعلومات الكافية لإيجاد طول هذا الطريق.



$\sin 43.5 = \frac{Opposite}{1500}$

$Opposite = the\ length\ of\ the\ road = 1500 \sin 43.5$

$the\ length\ of\ the\ road = 1032.53\ m \approx 1033\ m$

فكر أحمد في طريق بديل أكثر ملائمة وهو طريق يقسم الأرض إلى قطعتين متساويتين في المساحة. يصل هذا الطريق المنزل بنقطة منتصف الضلع المجاور للطريق العام . ما هو طول هذا الطريق؟

$\beta^2 = (1500)^2 + (687.385)^2 - 2 \times 1500 \times 687.385\ cos\ 43.5°$

$\beta^2 = 2722498.14 - 1495834.38$

$\beta = \sqrt{1226663.76} = 1107.55\ m$

$\beta^2 = 1226663.76$